

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologic - 09.12.2016

- Pentru orice soluție corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.
- Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermedii pentru rezolvări partiale, in limitele punctajului indicat in barem.
- Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

1	$\hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} = \hat{6+3}$ $= \hat{1} \text{ în } \mathbb{Z}_4$	3p 2p
2	$5 * (-4) = 5 + (-4) + 5 \cdot (-4) =$ $= -19$	2p 3p
3	Definiția elementului neutru $x * e = x \Leftrightarrow x + e + 2 = x \Leftrightarrow e = -2$ $e * x = -2 * x = -2 + x + 2 = x$	1p 2p 2p
4	$\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x} dx = 2 \int_1^2 x dx + \int_1^2 \frac{x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$ $2 \frac{x^2-1^2}{2} + 2 - 1 + \ln 2 - \ln 1 = 4 + \ln 2$	2p 3p
5	$\ln x = t, \quad \frac{1}{x} dx = dt$ $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$	2p 3p
6	$F(x)$ o primitiva a functiei $f(x)$, rezulta $F'(x) = f(x)$ $F'(x) = (e^x + x^3 + 2x - 1)' = e^x + 3x^2 + 2$ Finalizare	1p 3p 1p

SUBIECTUL II**(30 de puncte)**

1.a	$(x - 5)(y - 5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30$ $= x * y, \forall x, y \in R.$	3p 2p
1.b	$x * x = (x - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)^2 + 5$ $(x - 5)(x - 6) = 0, x_1 = 5, x_2 = 6.$	2p 3p
1.c	$x * 5 = 5(1)$ $5 * x = 5(2)$ Legea este asociativă (3) Din (1), (2), (3) rezultă că $x * 5 * y = (x * 5) * y = 5 * y = 5$.	2p 2p 1p
2.a	$I_2 = A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \in \mathbb{R}^*$ Deci $I_2 = A(1) \in G$	3p 2p
2.b	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix} =$	2p

	$= \begin{pmatrix} 1 & y-1+xy-y \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = A(xy), (\forall)x, y \in \mathbb{R}^*$	3p
2.c	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = A(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = A(120)$ $= \begin{pmatrix} 1 & 120-1 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 119 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$	3p 2p

SUBIECTUL III**(30 de puncte)**

1.a	$\int_1^2 (f(x) - 3\sqrt{x}) dx = \int_1^2 (x^2 + x) dx$ $\int_1^2 (x^2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big _1^2$ Finalizare	1p 2p 2p
1.b	$F(x) = \int f(x) dx$ $\int (x^2 + x + 3\sqrt{x}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\sqrt{x} + C$ $F(0)=1 \Rightarrow C=1$ Finalizare	1p 2p 1p 1p
1.c	$F(x)$ o primitiva a functiei $f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$ $F(x)$ crescatoare pe $(0, \infty) \Rightarrow F'(x) > 0$ $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ Finalizare	1p 1p 2p 1p
2.a	$I_0 = \int_1^2 e^x dx =$ Finalizare $I_0 = e^2 - e$	2p 3p
2.b	$I_1 = \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x (e^x)' dx =$ $= xe^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$	2p 3p
2.c	$I_n = \int_1^2 x^n e^x dx = \int_1^2 x^n (e^x)' dx =$ $= x^n e^x \Big _1^2 - n \int_1^2 x^{n-1} e^x dx = 2^n e^2 - e - n I_{n-1}$	2p 3p

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Științe ale naturii - 09.12.2016

- Pentru orice soluție corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.
- Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.
- Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I 30 de puncte

1	Pentru fiecare valoare verificată corect câte 1 punct Precizarea soluției $\{\widehat{1}, \widehat{3}\}$	4p 1p
2	$(i+2) \circ (i-1) = i+2+i-1-2i$ $= 1$	2p 3p
3	$x * 5 = 3$, unde x este simetricul lui 5 în raport cu legea dată $x = \frac{7}{3}$	2p 3p
4	$\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx = 2 \int_1^2 x^2 dx - 5 \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 7 \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ Finalizare: $\frac{175}{24} - 5\ln 2$	2p 3p
5	F primitivă a lui f $\Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x)$ sau $(F(x))' = f(x)$ Finalizare	2p 3p
6	$\ln x = t, \frac{1}{x} dx = dt$ $\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) =$ $= \frac{1}{2} \ln(1+\ln^2 x) + C$	2p 2p 1p

Subiectul al II-lea 30 puncte

1.a)	$xy + 7x + 7y + 42 = (x+7)(y+7) - 7$ Finalizare	1p 4p
b)	$x * (x+1) = (x+7)(x+8) - 7$ $(x+7)(x+8) - 7 = -7$ $X \in \{-7, -8\}$	2p 2p 1p
c)	verificare $(-7) * (x) = -7$ $(x) * (-7) = -7$ $(-9) * (-8) * \dots * 8 * 9 = -7$.	2p 2p 1p
2.a)	$A_0 = \begin{pmatrix} 2016^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow I_3 \in G$ $A_0 \in G$	5p

b)	$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2010^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2010^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$	3p 2p
c)	Partea stabila. Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in G, \forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu “.”.	1p
	Asociativitatea. Înmulțirea matricelor pe mulțimea G este asociativă deoarece este operație indușă de înmulțirea matricelor pe $M_3(R)$. Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$ $\left. \begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{“.” comutativă}$	1p 1p
	Elementul neutru: $\exists A_0 = I_3 \in G$, conform a)	1p
	Elemente simetrizabile: $\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$ $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0$ $A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x .	1p

Subiectul al III-lea**30 puncte**

1.a)	$l_s(0) = 1, l_d(0) = 1, f(0) = 1$, deci f continuă în $x=0$ f continuă pe $\mathbf{R} - \{0\}$ ca funcții elementare, deci f continuă pe \mathbf{R} f admite primitive pe \mathbf{R}	2p 1p 2p
b)	primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ dacă $F'(x) = f(x) > 0$ $f(x) > 0$	2p 3p
c)	$F_1(x) = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x + c$ $F_1(0) = 1$ $c = 1$ $F_1(x) = \arctg x + 1$	2p 1p 1p 1p
2.a)	a) $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 (3x + 1) dx =$	2p 3p

	$= \left(\frac{3x^2}{2} + x \right) \Big _0^1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	
b)	b) $F'(x) = (3x + m)'e^x + (3 + m)(e^x)' = 3e^x + (3x + m)e^x = (3x + m + 3)e^x$ $F(x) = f(x) \Leftrightarrow (3x + m + 3)e^x = (3x + 1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci } m = -2$	3p 2p
c)	c) $\int_0^a (3x + 1)e^x dx = (3x - 2)e^x \Big _0^a = (3a - 2)e^a + 2$ $(3a - 2)e^a + 2 = 3a \Leftrightarrow (3a - 2)(e^a - 1) = 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$	3p 2p

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Matematică-informatică - 09.12.2016

- Pentru orice soluție corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.
- Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.
- Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

1	$\hat{4}^{2k+1} = \hat{4}$ $\hat{4}^{2k} = \hat{1}$ $\hat{4}^{2016} = \hat{1}$	2p 2p 1p
2	$2 * e = 32$ $e * 2 = 32$ $= 64$	2p 2p 1p
3	Dacă x este simetricul lui 1 , atunci $x * 1 = 1 * x = 6$ $x * 1 = 6 \leftrightarrow x = \frac{19}{4}$ nu apartine lui Z	2p 3p
4	$l_s(0) = \frac{1}{5}, l_d(0) = \frac{1}{5}, f(0) = \frac{1}{5}$, deci f continua in x=0 f continua pe $\mathbf{R} - \{0\}$ ca functii elementare, deci f continua pe \mathbf{R} f admite primitive pe \mathbf{R}	2p 1p 2p
5	$\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^2-2+2}{2-x^2} dx = - \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2-2} dx$ Finalizare: $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right $	2p 3p
6	$\cos x = t, -\sin x \cdot dx = dt, 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ Finalizare: $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$	3p 2p

SUBIECTUL II**(30 de puncte)**

1.a	$2xy - x - y + 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$ Finalizare	1p 4p
1.b	verificare $\frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2}$ $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{7} \right) \circ \left(-\frac{1}{6} \right) \circ \dots \circ \left(\frac{1}{6} \right) \circ \left(\frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
1.c	Conform a) avem $2^3 \left(x - \frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{2} = 13$ $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right] = 0$	2p 2p

	$x \in \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$	1p
2.a	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ -x-y & 1 & -xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	2p 3p
2.b	$I_3 = A(0) \in M$ Conform a) avem $A(0) = A(x-x) = A(x) \cdot A(-x)$ $(A(x))^{-1} = A(-x) \in M$	2p 1p 2p
2.c	Considerăm funcția $f: M \rightarrow \mathbb{R}, f(A(x)) = x$ f – morfism $f(A(x)A(y)) = f(A(x)) + f(A(y))$ Bijectivitate	1p 2p 2p

c

SUBIECTUL III**(30 de puncte)**

1.a	$\ln x = t, \frac{1}{x} dx = dt$ $\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+t} dt = \ln 1+t = \ln 1+\ln x + c$ $F(e^{e-1}) = 2 \Rightarrow \ln 1+ln e^{e-1} + c = 2 \Rightarrow c = 1$	1p 2p 2p
1.b	$F'(x) = f(x)$ $f(x) > 0, \forall x \in (1; \infty)$ F crescătoare pe $(1; \infty)$	1p 2p 2p
1.c	$F(\sqrt[n]{e}) = \ln 1 + \ln \sqrt[n]{e} + 1 = \ln \frac{n+1}{n} + 1$ $F(\sqrt{e}) + F(\sqrt[3]{e}) + F(\sqrt[4]{e}) + \dots + F(\sqrt[11]{e}) = 10 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{12}{11} = 10 + \ln 6$	2p 3p
2.a	F_a derivabilă $F_a'(x) = f_a(x)$ F_a este o primitivă a funcției $f_a, \forall a \in \mathbb{R}$	1p 3p 1p
2.b	Conform a) avem $\int_1^2 f_2(x)dx = F_2(x) _1^2$ Finalizare: $\frac{26\sqrt{5}-40\sqrt{2}}{10}$	2p 3p
2.c	$F_1(x) = t, f_1(x)dx = dt$ $\int f_1(x)F_1^2(x)dx = \int t^2 dt = \frac{F_1^3(x)}{3} + C$	2p 3p

